2の補数 2進法の減算と負の数の扱い方

今回の講座でわかる重要ポイント

① 引き算 ＝ 補数を足す→最高位を無視できる！

例　$5_{(10)}$ － $3_{(10)}$

$0101_{(2)}$　$0011_{(2)}$

$$\begin{array}{rl} 0101 & \leftarrow 5 \\ +)\ 1101 & \leftarrow 3\text{の補数} \\ \hline 10010 & \end{array}$$

←答えは最高位を無視した0010（$5-3=2_{(10)}$ なのでOK）

② 補数は「反転＋１」

$3_{(10)}$

$0011_{(2)} \xrightarrow{\text{反転}} 1100_{(2)} \xrightarrow{+1} 1101_{(2)}$（補数）

③ 「正の数」 $\xrightleftharpoons{\text{補数の関係}}$ 「負の数」

+2　0010　$\xrightleftharpoons{\text{補数の関係}}$　−2　1110

④ nビットでは10進法の -2^{n-1} から $2^{n-1}-1$ まで表せる

4ビットでは -2^{4-1} から $2^{4-1}-1$ まで⇒−8から7まで表せる

ポイント① 引き算 = 補数を足す→最高位を無視できる！

・なぜ「補数」が必要なのか

コンピュータの回路には
足し算を行う「加算器」しかないから

右図のように, 本来足し算と引き算は
まったく別の回路を
用意しないといけないが,
コンピュータは
「加算器で減算も行う」ことで,
回路を簡略化している。

5 + 3

$$\begin{array}{rl} {}^{1\,1\,1} & \\ 0101 & 5 \\ +)\ 0011 & 3 \\ \hline 1000 & 8 \end{array}$$

5 − 3

$$\begin{array}{rl} {}^{0\;2} & \\ 0101 & 5 \\ -)\ 0011 & 3 \\ \hline 0010 & 2 \end{array}$$

図1 2進法の足し算と引き算の計算の例

ポイント① 引き算 ＝ 補数を足す→最高位を消すでできる！

・「補数」を使った引き算を足し算(加算器)で行うイメージ

補数を足して　最高位を無視

$$5-2 \Rightarrow 5+\underline{8} = \cancel{1}3$$

補数を足して　最高位を無視

$$=5+(\underline{10-2})-10$$

$$=5+8-10$$

$$=3$$

補数とは
足すと桁上がりする
最小の数
2→8, 3→7, 6→4, …

ポイント② 補数は「反転＋１」

・２進数の補数を使って「５－２」を計算してみよう！

２進数における補数を「２の補数」という。

「２の補数」は「反転＋１」で求められる！

$$
\begin{array}{rrl}
2 \rightarrow & 0010 & \\
 & 1101 & 反転 \\
+) & 1 & +1 \\
\hline
 & 1110 & \leftarrow 2の補数
\end{array}
$$

理由) 補数は足すと桁上がりする
最小の数なので,
もとの数＋補数＝10000にしたい。

$$
\begin{array}{rrl}
 & 0010 & もと \\
+) & 1101 & 反転 \\
\hline
 & 1111 &
\end{array}
$$

2進数である
もとの数に
反転したものを
足すと必ず
1111になる

$$
\begin{array}{rrl}
 & 1111 & \\
+) & 1 & 1足す \\
\hline
 & 10000 &
\end{array}
$$

これに1加えると
必ず桁上がりして
10000になる！

ポイント① 引き算 ＝ 補数を足す→最高位を消すでできる！

5 − 2

$$\begin{array}{rl} 0101 & \\ +)\,1110 & \text{補数を足す} \\ \hline \boxed{\cancel{1}}0011 & \text{最高位を無視} \end{array}$$

答えは0011

→これは10進数の「3」なので正解！

・最高位を無視ってコンピュータ
　ではどうやってる？
→実は今回は「4ビット」で考えていたため, 4桁以上はそもそも自動的に無視されるようになっている！

$1\boxed{0}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{1}$

桁あふれで自動的に無視される

補数を使った引き算の練習をしよう！

(1) 6 − 3

3→0011
→1100
→1101

$$
\begin{array}{r}
0110 \\
+)\ 1101 \\
\hline
\cancel{1}0011
\end{array}
$$

補数を足す

最高位を無視

答えは0011

→これは10進数の「3」なので正解！

(2) 7 − 2

2→0010
→1101
→1110

$$
\begin{array}{r}
0111 \\
+)\ 1110 \\
\hline
\cancel{1}0101
\end{array}
$$

補数を足す

最高位を無視

答えは0101

→これは10進数の「5」なので正解！

ポイント③「正の数」$\overset{\text{補数の関係}}{\rightleftarrows}$「負の数」

2進法	10進法
0111	7
0110	6
0101	5
0100	4
0011	3
0010	2
0001	1
1 0000	0
1111	-1
1110	-2
1101	-3
1100	-4
1011	-5
1010	-6
1001	-7
1000	-8

10000 足して

補数

使える桁を4ビットに限定して2進数の「負の数」を考える。

大きさが同じ「正の数＋負の数＝0000 (例 2+(-2)=0000)」になれば良いので, これを加算で扱うには,
足して「10000」になれば良い！(4ビットだと先頭の1は無視できる)

これは足して1桁上がる最小の数の関係なので
「補数」と言える

よって正の数に対する補数は負の数であり,
負の数に対する補数は正の数という関係になっている

ポイント③「正の数」$\underset{}{\overset{\text{補数の関係}}{\rightleftarrows}}$「負の数」

	2進法				10進法
	0	1	1	1	7
	0	1	1	0	6
	0	1	0	1	5
	0	1	0	0	4
	0	0	1	1	3 ⋮
	0	0	1	0	2
	0	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0
	1	1	1	1	-1
	1	1	1	0	-2
	1	1	0	1	-3 ⋮
	1	1	0	0	-4
	1	0	1	1	-5
	1	0	1	0	-6
	1	0	0	1	-7
	1	0	0	0	-8

補数

・負の数を10進法に戻す方法

補数で表すと
先頭が「1」→　負の数
先頭が「0」→　正の数

よって符号を決める先頭の1ビットを**符号ビット**という。

例) 4ビットで表された1011を10進法で表せ。

1011は先頭が「1」なので負の数

間違った求め方　011が3だから−3　←1011は1と011に分かれるわけではない

よって1011の補数である正の数を求めて－をつける

補数は「反転＋1」

$$\begin{array}{r} 0100 \\ +)\quad\quad 1 \\ \hline \text{補数}\ 0101 \end{array}$$

0101は10進法では
$2^2+1=5$
よって $\underline{-5}$

④ nビットでは10進法の -2^{n-1} から $2^{n-1}-1$ まで表せる

2進法	10進法
0111	7
0110	6
0101	5
0100	4
0011	3
0010	2
0001	1
1 0000	0
1111	-1
1110	-2
1101	-3
1100	-4
1011	-5
1010	-6
1001	-7
1000	-8

補数

・4ビットの場合

先頭「0」の正の数の最大は
「0111」で10進法の「7」である

「0111」は1加えると「1000」(＝8)になるが
これは先頭が「1」なので負の数の「−8」を表す。
※1000の補数は1000なので−8も補数の関係にはなっている。
よって**4**ビットで表せる最小の数は
「1000」で「2^3」＝「−8」であり,
4ビットで表せる最大の数は
8より1少ない「2^3-1」までということになる！

nビットでは10進法の -2^{n-1} から $2^{n-1}-1$ まで表せる

今日の講座の確認をしよう！

問1) 符号あり8ビットで表現できる値の範囲を10進法で答えよ。

解答)nビットでは10進法の -2^{n-1} から $2^{n-1}-1$ まで表せるため
-2^7 から 2^7-1 まで, つまり -128から127まで表せる。

問2) 符号あり8ビットの11100111を10進法で表せ。

解答)先頭が1なので負の数である。よって補数である正の数を
求めると, 00011000(反転)に1を足して00011001なので
$2^4+2^3+2^0=25$。よって-25

問3) 符号あり8ビットの1111100-11100111を10進法で答えよ。

引き算は「補数を足して最高位を消す」とできる。11100111の補数は問2より00011001なので

```
   11111100
+) 00011001(補数)
-----------
  100010101
```

00010101なので $2^4+2^2+2^0=21$